Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 173–182

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Sur le Prolongement Covariant d'une Equation Linéaire par Rapport au Groupe d'Itération

Von

Z. Moszner

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998 durch das w. M. Ludwig Reich)

Résumé

On donne une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une équation fonctionnelle linéaire possède le prolongement covariant par rapport au groupe d'itération donné.

AMS Subject Classification: 39B12, 39B52, 39B62.

*

En proposant la définition suivante: on dit que l'équation

$$\phi(p(x)) = a(x)\phi(x) + b(x), \tag{1}$$

où $a\colon X \to K$, $b\colon X \to K$, $p\colon X \to X$ (X un ensemble arbitraie et K un corps arbitraire) sont les fonctions données et $\phi\colon X \to K$ est la fonction cherchée, possède le prolongement covariant par rapport à un groupe d'itération (the covariant embbeding with respect to an iteration group) $(\Pi(t, .))_{t\in I}$, où $I = \mathbb{R}$ ou $I = \mathbb{C}$ et $\Pi\colon I \times X \to X$ avec $\Pi(1,x) = p(x)$, s'ils existent les fonctions $\alpha\colon I \times X \to K$ et $\beta\colon I \times X \to X$ telles que pour chaque solution ϕ de (1)

$$\phi(\Pi(t,x)) = \alpha(t,x)\phi(x) + \beta(t,x), \tag{2}$$

$$\alpha(t+s,x) = \alpha(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x)), \tag{3}$$

$$\beta(t+s,x) = \beta(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x)) + \beta(t,\Pi(s,x)), \tag{4}$$

$$\alpha(1,x) = a(x), \beta(1,x) = b(x), \alpha(0,x) = 1, \beta(0,x) = 0,$$

L. Reich a posé [3] le problème sous quelles suppositions l'équation (1) possède ce prolongement?

Rappelons que pour un groupe d'itération Π nous avons

$$\Pi(t, \Pi(s, x)) = \Pi(t + s, x) \text{ et } \Pi(0, x) = x$$

et que nous comprenons par l'orbite de Π chaque ensemble de la forme $\{\Pi(t, x) \quad t \in I\}$ pour x fixé. Ces orbites sont idéntiques ou disjoints. Remarquons que la fonction α remplissante (3) est nommée la fonction de sortie (the input function – [4], p. 23) dans la théorie des automates abstraits.

On donne dans [1] la solution générale de (3) sous la supposition que I forme un groupe et K est un semi-groupe avec l'élément neutre et avec la propriété de la réduction à gauche. Il y a dans [2] la solution générale de (4) si X forme un intervalle, $I = K = \mathbb{R}$, Π est continue et α a la forme speciale (p.ex.elle est aussi continue).

Donnerons un exemple négatif. L'équation $\phi(x) = \phi(x)$ ne possède pas du prolongement par rapport au groupe d'itération $\Pi(t, x) = x + f(t)$, où $f(t)$ est une fonction additive telle que $f(1) = 0$ et $f \not\equiv 0$. En effet dans le cas contraire puisque $\phi(x) = c$ (constante arbitraire) est une solution de l'équation en considération, donc $c = \alpha(t, x)c + \beta(t, x)$ nous donne $\alpha(t, x) \equiv 1$ et $\beta(t, x) \equiv 0$. La condition (2) a dans ce cas la forme $\phi(x + f(t)) = \phi(x)$, qui n'a pas lieu pour $\phi(x) \equiv x$. Cet exemple montre aussi que (3) et (4) n'impliquent pas de la condition (2). La même équation $\phi(x) = \phi(x)$ possède le prolongement covariant par rapport au groupe d'itération $\Pi(t, x) \equiv x$ avec $\alpha(t, x) \equiv 1$ et $\beta(t, x) \equiv 0$.

Le théorème suivant donne une réponse au problème plus haut.

Théorème. L'équation (1) possède le prolongement covariant par rapport au groupe d'itération Π si et seulement s'il n'existe pas d'une solution de (1) ou bien pour chaque orbite O de Π

(a) l'espace vectoriel V des solutions de l'équation

$$\phi(p(x)) = a(x)\phi(x) \tag{5}$$

sur O a la dimension égale à 1 et pour chaque solution ϕ de (5) on a $\phi(x) \equiv 0$ sur O ou $\phi(x) \neq 0$ ou

(b) cette dimension est zéro et $a(x) \equiv c$ (stable), $c \neq 0$, sur O et il existe une solution $k\colon I \to K$ de l'équation

$$k(t + g) = k(t)k(g) \text{ pour } t \in I \text{ et } g \in \{s\colon \Pi(s, u) = u\} \tag{6}$$

pour un u de O, telle que $k(1) = c$.

Démonstration de "seulement si" Soit O une orbite de Π et ϕ_1 et ϕ_2 les deux solutions de (5). Si $\phi_1 \equiv 0$ sur O ou $\phi_2 \equiv 0$ sur O, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes. Soit ϕ une solution de (1), dans ce cas $\phi + \phi_i (i = 1, 2)$ est aussi la même, d'où d'après (2)

$$\phi_i(\Pi(t, x)) = \alpha(t, x)\phi_i(x). \tag{7}$$

Il en résulte que s'il existe un x tel que $\phi_i(x) = 0$, $\phi_i \equiv 0$ sur l'orbite O à laquelle appartient x. Si $\phi_1 \not\equiv 0 \not\equiv \phi_2$ sur O, donc $\phi_1(x) \neq 0 \neq \phi_2(x)$ pour chaque x de O. Nous avons donc d'après (6)

$$\frac{\phi_1(\Pi(t, x))}{\phi_1(x)} = \frac{\phi_2(\Pi(t, x))}{\phi_2(x)} \tag{8}$$

pour chaque x de O, t de I, alors ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes sur O.

S'il existe une solution de (5) qui n'est pas identiquement zéro nous avons (a).

On sait [1] que

$$\Pi(t, x) = h^{-1}(h(x) + t) \text{ pour } x \in 0, t \in I,$$

où $h\colon O \to I/G$ (le groupe quotient) est une bijection, G étant un sous-groupe du groupe $(I, +)$. Nous allons démontrer que si $1 \notin G$, l'équation (5) possède une solution $\not\equiv 0$. Considérons dans I/G la relation équivalence suivante

$$A \,\rho\, B \Leftrightarrow \exists\, n \text{ entier: } B = A + n,$$

un sélecteur S de la famille $(I/G)/\rho$, une fonction $f^* \quad S \to K \setminus \{0\}$ arbitraire et une fonction $f \quad I/G \to K \setminus \{0\}$ étant un prolongement de f^* par la relation

$$f(A + 1) = a(h^{-1}(A)) f(A) \text{ pour } A \in I/G.$$

En posant $A = h(x)$ pour $x \in O$, nous avons

$$f(h(x) + 1) = a(x) f(h(x)),$$

alors

$$f[h(h^{-1}(h(x) + 1))] = a(x) f[h(h^{-1}(h(x)))],$$

d'où

$$f(h(\Pi(1, t))) = a(x) f(h(x)),$$

alor $\phi = f(h)$ est une solution de (5) qui n'est pas $\equiv 0$.

Si (5) possède seulement la solution $\equiv 0$, la dimension de V est zéro et $1 \in G$.

Il existe $x_0 \in O$ tel que $h(x_0) = G$. Nous avons

$$\Pi(1, x_0) = h^{-1}(h(x_0) + 1) = h^{-1}(G + 1) = h^{-1}(G) = x_0.$$

Il existe, pour $x \in O$, un $s(x)$ tel que $\Pi(s(x), x_0) = x$, alors

$$\begin{aligned}\Pi(1, x) &= \Pi(1, \Pi(s(x), x_0)) = \Pi(1 + s(x), x_0)\\ &= \Pi(s(x), \Pi(1, x_0)) = \Pi(s(x), x_0) = x.\end{aligned}$$

Remarquons que pour α remplissante (3): $\alpha(t, x) \equiv 0$ sur $I \times O$ ou $\alpha(t, x) \neq 0$ sur $I \times O$. En effet s'il existe $(s_0, x_0) \in I \times O$ tel que $\alpha(s_0, x_0) = 0$, nous avons d'après (3) que $\alpha(t + s_0, x_0) = 0$ pour chaque t de I, alors $\alpha(u, x_0) = 0$ pour chaque u de I. Soit $x \in O$ et $s(x) \in I$ tel que $\Pi(s(x), x) = x_0$, d'où d'après (3)

$$\begin{aligned}\alpha(t + s(x), x) &= \alpha(s(x), x)\alpha(t, \Pi(s(x), x))\\ &= \alpha(s(x), x)\alpha(t, x_0) = 0,\end{aligned}$$

alors $\alpha(u, x) = 0$ sur $I \times O$.

Il en résulte, puisque chez nous $\alpha(0, x) = 1$, que $\alpha(t, x) \neq 0$ sur $I \times O$.

Nous avons d'après (3) pour $s = 1$.

$$\alpha(t + 1, x) = \alpha(1, x)\alpha(t, \Pi(1, x)) = \alpha(1, x)\alpha(t, x),$$

alors

$$\alpha(t + 1, x)/\alpha(t, x) = \alpha(1, x) = a(x).$$

D'après (3)

$$\alpha(t, x) = \alpha(t, \Pi(s(x), x_0)) = \alpha(t + s(x), x_0)/\alpha(s(x), x_0)$$

et

$$\alpha(t + 1, x) = \alpha(t + 1 + s(x), x_0)/\alpha(s(x), x_0)$$

et de là

$$\alpha(t + 1, x)/\alpha(t, x) = a(x_0),$$

d'où $a(x) = c$ (constans). Puisque $\alpha(t, x) \neq 0$, il doit être $c \neq 0$.

La fonction $k(t) = \alpha(t, x_0)$ pour un x_0 fixé dans O remplit (6) puisque pour $t \in I$ et s tel que $\Pi(s, x_0) = x_0$

$$\alpha(t + s, x_0) = \alpha(s, x_0)\alpha(t, \Pi(s, x_0)) = \alpha(s, x_0)\alpha(t, x_0).$$

Démonstration de "si" S'il n'existe pas de la solution de (1), cette équation possède évidemment le prolongement par rapport à chaque groupe

d'itération. S'il existe une solution ϕ_1 de (5) tel que $\phi_1(x) \neq 0$ sur O, posons

$$\alpha(t,x) = \frac{\phi_1(\Pi(t,x))}{\phi_1(x)}.$$

La fonction α ne dépend pas du choix de la solution ϕ_1 de (5) telle que $\phi_1(x) \neq 0$ sur O. En effet si ϕ_2 est une solution de (5) telle que $\phi_2(x) \neq 0$ sur O, nous avons d' après la dépendance linéaire de ϕ_1 et ϕ_2 sur O que (8) a lieu.

Remarquons que $\alpha(0,x) = 1, \alpha(1,x) = a(x)$ et la fonction α remplit (3).

Posons

$$\beta(t,x) = \phi(\Pi(t,x)) - \alpha(t,x)\phi(x) \text{ pour } x \in O \text{ et } \in \mathrm{I},$$

pour une solution ϕ de (1). La fonction β ne dépend pas du choix de la solution ϕ de (1). En effet si ϕ^* est une solution de (1), différente de ϕ sur O, $\phi - \phi^*$ est une solution de (5) qui est différente de zéro au moins dans un point de O, donc $\phi_3(x) = \phi(x) - \phi^*(x) \neq 0$ pour $x \in O$ et de là

$$\beta(t,x) = \phi^*(\Pi(t,x)) + \phi_3(\Pi(t,x)) - \frac{\phi_3(\Pi(t,x))}{\phi_3(x)}[\phi^*(x) - \phi_3(x)]$$
$$= \phi^*(\Pi(t,x)) - \alpha(t,x)\phi^*(x).$$

Remarquons que $\beta(0,x) = 0, \beta(1,x) = b(x)$ et (2) a évidemment lieu. De là (4) est aussi remplie, c.q.f.d.

Si le cas (b) a lieu, alors s'il existe une fonction α remplissante (3), $\alpha(0,x) = 1$ et $\alpha(1,x) = a(x)$, il suffit poser

$$\beta(t,x) = \phi(\Pi(t,x)) - \alpha(t,x)\phi(x)$$

pour la solution ϕ de (1) (elle est unique dans ce cas) pour constater que (2), (4) et $\beta(0,x) = 0, \beta(1,x) = b(x)$ ont lieu.

Pour finir la démonstration il suffit donc montrer qu'il existe une solution α de (3) remplissante $\alpha(0,x) = 1$ et $\alpha(1,x) = c \neq 0$.

Fixons $x_0 \in O$ et désignons par $S(x)$ tel élément de I pour lequel $\Pi(S(x), x_0) = x$. L'ensemble $\{S(x)\}_{x \in O}$ forme un sélecteur de l'ensemble I/G et chez nous $1 \in G$. Désignons par $\bar{s}$ la fonction de I à I qui est stable sur les ensembles de la famille I/G et qui est l'déntité sur l'ensemble $\{S(x)\}_{x \in O}$. Nous avons donc $\bar{s}(S(x)) = S(x)$ et on peut presenter chaque élément u de I uniquement sous la forme $u = \bar{s}(u) + g$, oú $g \in G$. La fonction $f(u) = f(\bar{s}(u) + g) = k(g)$, oú k remplit (6), est bien définie fonction de I à I qui a la propriété

$$f(u)/f(v) = f(u+g)/f(v+g) \text{ pour } u,\ v \in I \text{ et } g \in G. \tag{9}$$

La fonction

$$\alpha(t, x) = f(t + S(x))/f(S(x))$$

remplit (3) et $\alpha(1, x) = c$. En effet nous avons

$$f(S(x)) = f(\bar{s}(S(x)) + 0) = k(0) = 1,$$
$$f(1 + S(x)) = f(\bar{s}(S(x) + 1) + 1) = k(1) = c,$$

alors $\alpha(1, x) = c$. De plus

$$\alpha(t + s, x) = f(t + s + S(x))/f(S(x)), \alpha(s, x) = f(s + S(x))/f(S(x)),$$
$$\alpha(t, \Pi(s, x)) = f(t + S(\Pi(s, x))/f(S(\Pi(s, x)).$$

Puisque

$$\Pi(S(\Pi(s, x)) - (s + S(x)), x_0) = \Pi(-s - S(x), \Pi(s, x))$$
$$= \Pi(-S(x), x) = x_0$$

d'après $\Pi(S(x), x_0) = x$, alors $g := S(\Pi(s, x)) - (s + S(x)) \in G$, donc d'après (9) l'équation (3) a lieu.

La démonstration du théorème est donc finie.

Faisons quelques observations à propos de la supposition (6).

1) S'il existe un $u \in O$ tel que $G := \{s \in I \quad \Pi(s, u) = u\} = \{0\}$, chaque fonction $k\colon I \to K$ telle que $k(0) = 1$ et $k(1) = c$ remplit (6) et naturellement la condition $k(1) = c$.
2) Si $K = \mathbb{C}$ la fonction $k(g) = c^g$ remplit (6) et naturellement $k(1) = c$. La même situation a lieu si $I = K = \mathbb{R}$ et $c > 0$.
3) On peut se passer qu'il n'existe pas la fonction k remplissante (6) pour laquelle $k(1) = c$. En effet soit $I = \mathbb{R}$, $X = [0, 1]$, $K = Q$ (= le corps des nombres rationnels), $\Pi(t, x) = h^{-1}(h(x) + t)$, où $h\colon X \to I/Q$ est une bijection, $c = 2$. Dans ce cas pour chaque $u \in O = X$ on a $G = Q$. Supposons qu'il existe une fonction $k\colon I \to K$ remplissante (6) et telle que $k(1) = 2$. Nous avons d'après (6):

$$2 = k(1) = k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left[k\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

donc une cotradiction, puisque $k\left(\frac{1}{2}\right)$ doit être rationnel.

Si dans cet exemple $K = \mathbb{R}$ et $c = -1$, nous avons aussi une contradiction.
4) Si $1 \in G$ (cette condition a lieu dans le cas (b) du théorème – voir la démonstration de ce théorème), la supposition (6) avec $k(1) = c$ est équivalente à l'existence d'une solution $k^*\colon G \to K$ de (6) pour

t, $g \in G$, remplissante $k^*(1) = c$. En effet la fonction $f(u) = f(\bar{s}(u) + g) = k^*(g)$ pour $u \in I$ où $\bar{s}(u)$ est la même que dans la démonstration du théorème, remplit (6) et si nous supposons de plus que $\bar{s}(0) = 0$, aussi $f(1) = c$.

Remarquons que cela est-ce que (1) possède un prolongement par rapport à Π ne dépend que des orbites de Π et pour les orbites O, sur lesquelles (5) a seulement la solution $\equiv 0$, cela dèpend de plus seulement des sous-groupes $G(x) = \{t \in I \quad \Pi(t,x) = x\}$ pour un x de O ($G(x)$ est le même pour chaque x dans O).

Remarquons que si

$$\forall x \exists \phi_1, \phi_2 - \text{les solutions de } (1): \phi_1(x) \neq \phi_2(x), \tag{10}$$

dans ce cas (2) entraîne (3) et (4). En effet nous avons d'après (2)

$$\begin{aligned}\alpha(t+s,x)\phi(x) + \beta(t+s,x) &= \phi(\Pi(t+s,x)) - \phi(\Pi(t,\Pi(s,x)))\\ &= \alpha(t,\Pi(s,x))\phi(\Pi(s,x)) + \beta(t,\Pi(s,x))\\ &= \alpha(t,\Pi(s,x))[\alpha(s,x)\phi(x) + \beta(s,x)] + \beta(t,\Pi(s,x))\\ &= \alpha(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x))\phi(x) + \beta(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x)) + \beta(t,\Pi(s,x)),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&[\alpha(t+s,x) - \alpha(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x))]\phi(x)\\ &\quad + [\beta(t+s,x) - \beta(s,x)\alpha(t,\Pi(s,x)) - \beta(t,\Pi(s,x))] \quad 1 = 0.\end{aligned}$$

Si nous posons ici, pour x fixé, au lieu de ϕ les fonctions ϕ_1 et ϕ_2, remplissantes (10), nous recevons le système de deux équations linéaires homogènes avec la matrice de la forme

$$\begin{bmatrix}\phi_1(x), 1\\ \phi_2(x), 1\end{bmatrix}$$

et avec les "inconnues" dans les paranthéses [ ]. Puisque le déterminant de ce système est égal à $\phi_1(x) - \phi_2(x) \neq 0$, donc les "inconnues" doivent être égaux à zéro, c.q.f.d.

La condition (10) est évidemment équivalente à la suivante: – il existe une solution de (1) et pour chaque x il existe une solution ϕ de (5) telle que $\phi(x) \neq 0$.

L. Reich a posé dans [3] aussi la question quand

$$\phi(x) = -\lim_{t \to \infty} \frac{\beta(t,x)}{\alpha(t,x)}? \tag{11}$$

Nous allons faire quelques remarques à cette question.

Si x appartient à l'orbite O de Π pour laquelle le cas (b) du théorème a lieu, alors $p(x) = \Pi(1, x) = x, a(x) = c$, donc l'équation (1) a la forme

$$\phi(x) = c\phi(x) + b(x). \tag{12}$$

Puisque dans ce cas l'équation $\phi(x) = c\phi(x)$ doit avoir seulement la solution $\equiv 0$, on a $c \neq 1$, d'où

$$f(x) = \frac{b(x)}{1-c}$$

est une solution unique de (12) sur O.

Dans le cas (a) du théorème pour l'orbite O chaque solution de (1) sur O doit être de la forme $d\phi_1(x)$, où $\phi_1(x) \not\equiv 0$ est une solution fixée de (5) et d est une constante, chaque solution de (1) sur O est donc égale à $\phi(x) + d\phi_1(x)$, où $\phi(x)$ est une solution fixée de (1). Puisque la limite dans (11) est déterminée uniquement, seulement une solution de (1) peut être de la forme (11). De plus dans le cas (a)

$$\alpha(t, x) = \frac{\phi_1(\Pi(t, x))}{\phi_1(x)}, \tag{13}$$

où $\phi_1(x) \neq 0$ est une solution de (5), (11) est équivalente à la condition

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(\Pi(t, x))}{\alpha(t, x)}. \tag{14}$$

Si $G := \{u \in I \quad \Pi(u, x) = x\} \neq \{0\}$, il existe dans G une suite $u_n \to \infty$. Il en résulte que

$$\frac{\phi(\Pi(u_n, x))}{\alpha(u_n, x)} = \frac{\phi(x) \quad \phi_1(x)}{\phi_1(x)} = \phi(x),$$

donc d'après (14) on a $\phi(x) = 0$. Cela est possible seulement si $b(x) = 0$ sur O. Si $b(x) \not\equiv 0$ sur O et $G \neq \{0\}$ la relation (11) ne peut avoir lieu pour aucune solution de (1).

En autres termes dans le cas (a) et si $b(x) \not\equiv 0$ sur O, la relation (11) peut avoir lieu seulement si $G = \{0\}$, *c.* à *d.* si $\Pi(., x)$ est injective pour chaque x de O.

On peut modifier le problème premier de L. Reich en exigeant seulement qu'ils existent pour chaque solution ϕ de (1) les fonctions α et β telles que (2), (3) et (4) ont lieu. Les fonctions α et β peuvent dépendre de ϕ dans ce cas. Nous démontrerons que ce problème est équivalent au problème premier de L. Reich. Il résulte de la démonstration du théorème que la condition nécéssaire et suffisante pour l'existence de ces fonctions α et β est dans ce cas suivante: il n'existe pas une solution de (1) ou bien pour chaque orbite O de Π dans le cas s'il existe une solution de (5) pas

identiquement zéro sur O, elle doit être $\neq 0$ pour chaque point de O et dans le cas contraire $a(x) = c \neq 0$ sur O et il existe une fonction $k \colon I \to K$ remplissante (6) et $k(1) = c$. Pour finir la démonstration de l'équivalence de ces deux problèmes il suffit donc montrer que

$$\text{(I)} \begin{cases} \text{la condition: s'il existe une solution } \not\equiv 0 \text{ de (5) sur } O \text{, elle doit être} \\ \neq 0 \text{ sur } O\text{, implique que la famille des solutions de (5) sur } O \text{ doit} \\ \text{avoir la dimension au plus égale à 1.} \end{cases}$$

Cette implication a naturellement lieu si (5) possède sur O seulement la solution $\equiv 0$. Supposons donc dans la suite qu'il existe une solution $\not\equiv 0$ de (5) sur O. Désignons $\Theta := \{p^n(x) \colon n \in E\}$, où $p^n(x)$ est l'itération d'ordre "n" de $p(x)$ et $E = \{0, 1, . \; .\}$. Puisque $p^n(x) = \Pi(n, x)$, nous avons $\Theta(x) \subset O(x) := \{\Pi(t, x) \colon t \in I\}$. Soit ϕ_1 une solution $\not\equiv 0$ de (5) sur O. Nous avons par l'itération de (5) sur $\Theta(x) \subset O$:

$$\phi_1(p^n(x)) = \bar{a}(n, x)\phi_1(x),$$

avec une fonction $\bar{a} \colon E \times X \to K$, d'où en fixant x nous constatons que la famille des solutions de (5) sur $\Theta(x)$ a la dimension égale à 1. Fixons x_0 dans O et posons

$$A := \bigcup_{x \in O} \{\Theta(x) \quad \Theta(x_0) \subset \Theta(x)\}.$$

La famille des solutions de (5) sur O a la dimension égale à 1 sur A. Si $A = O$ nous pouvons finir la démonstration. Supposons donc que $A \neq O$ et remarquons que $z \in A \Rightarrow p(z) \in A$ et $p(z) \in A \Rightarrow z \in A$. L'implication première est évidente d'après la définition de $\Theta(x)$. Si $p(z) \in A$, il existe un $y \in O$ tel que $p(z) \in \Theta(y) \supset \Theta(x_0)$, alors il existe un k tel que $p(z) = p^k(y)$. Si $k = 0$, *c. à d.* $p(z) = y$, nous avons $z \in \Theta(\Pi(-1, z)) \supset \Theta(y) \supset \Theta(x_0)$, donc $z \in A$. Si $k > 0$, $z \in \Theta(z) \subset \Theta(y) \subset A$, alors aussi $z \in A$. Il résulte des implications démontrées que les implications analogues pour l'ensemble $O \setminus A$ au lieu de A sont aussi vraies. Si ϕ_1 est une solution $\neq 0$ de (5) sur O, la fonction

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \phi_1(x) & \text{sur} \quad A, \\ 0 & \text{sur} \quad O \setminus A \end{cases}$$

est aussi une solution de (5), donc une contradiction avec la supposition faite.

Il résulte de nos considérations le

Corollaire. On peut éliminer dans la partie (a) du théorème la condition que l'espace V a la dimension 1.

Remarquons enfin que l'implication invérse à l'implication (I) n'est pas vraie. En effet prenons $X = K = I = \mathbb{R}$, $p(x) = x + 1$,

$\Pi(t, x) = t + x$, $a(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, . \, .\}$ et en outre $a(x) = 0$. La solution générale de (5) a dans ce cas la forme: $\phi(x) = c$ (constans arbitraire dans $\mathbb{R}$) pour $x \in \mathbb{Z}$ et $\phi(x) \equiv 0$ en outre, alors l'espace V de ces solutions a la dimension égale à 1, mais il existe sur $O = \mathbb{R}$ une solution de (5) qui est $\not\equiv 0$ et n'est pas $\neq 0$ sur O. Cet exemple montre qu'on ne peut pas éliminer dans la partie (a) du théorème de la condition: pour chaque solution ϕ de (5) on a $\phi(x) \equiv 0$ sur O ou $\phi(x) \neq 0$ sur O. De plus il n'existe pour l'équation (5) dans l'exemple plus haut aucun groupe d'itération Π pour lequel cette équation possède un prolongement covariant. Supposons à rebours. Puisque $\Pi(1, x) = x + 1$ il doit exister une orbite O de Π pour laquelle $\mathbb{Z} \subset O$. Nous avons $O = \mathbb{Z}$ puisque dans le cas contraire nous avons une contradiction avec la partie deuxième du point (a) du théorème. Il doit donc exister une bijection φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}/G$, pour un sous-groupe G du groupe $(\mathbb{R}, +)$, pour laquelle $\Pi(t, n) = \varphi^{-1}(\varphi(n) + t)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, d'où $n + 1 = \varphi^{-1}(\varphi(n) + 1)$, alors $\varphi(n + 1) = \varphi(n) + 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$, donc $\varphi(n + 1) = \varphi(n) + [1]$, où $[m]$ désigne l'élément de $\mathbb{R}/G$ auquel appartient m. Il en résulte que $\varphi(n + m) = \varphi(n) + [m]$. En désignant $\psi(n) := \varphi(n) - \varphi(0)$ nous constatons que aussi $\psi(n + m) = \psi(n) + [m]$ et $\psi(0) = G$, d'où $\psi(m) = \psi(0) + [m] = G + [m] = [m]$. Si $f(x) = \psi^{-1}(C)$ pour $x \in C \in \mathbb{R}/G$, nous avons pour $x \in C_1 \in \mathbb{R}/G$ $y \in C_2 \in \mathbb{R}/G$

$$f(x+y) = \psi^{-1}(C_1 + C_2) = \psi^{-1}(C_1) + \psi^{-1}(C_2) = f(x) + f(y),$$

alors la fonction f $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est additive. Puisque elle n'est pas stable, nous avons une cotradiction (il doit être $f(w) = f(1)w$ pour w rationnel!).

On peut poser aussi le problème suivant: sous quelles suppositions il existe un groupe d'itération Π par rapport auquel l'équation (1) possède un prolongement covariant?

J'ai signalé ces résultats pendant 36ème International Symposium on Functional Equations (Brno 1998).

Travaux cités

[1] Moszner, Z.: Structure de l'automate plein, réduit et inversible. Aequationes Math. **9:** 46–59 (1973).

[2] Moszner, Z.: Les équations et les inégalites liées à l'équation de translation. Opuscula Math. (sous presse).

[3] Reich, L.: Remark. Aequationes Math. **55:** 311–312 (1998).

[4] Starke, P. H.: Abstract Automata. North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, 1972.

Author's address: Prof. Dr. hab. Zenon Moszner, WSP, Instytut matematyki, ul. Podchorazych 2, PL-30-084, Kraków.